

垂直井眼中管柱屈曲精确解的应用

魏大农¹ 周志宏²

(1. 江汉石油管理局测井公司 湖北潜江 433123; 2. 长江大学机械学院 湖北荆州 434023)

摘要 管柱在垂直井眼中的屈曲方程可以归结为一个非线性方程, Mitchell 得出了该方程的精确解。在此基础上, 分析和计算了方程解的性状、管柱与井壁的接触力曲线, 以及管柱的缩短情况。分析表明, 与传统 Lubinski 解相比, 在精确解中管柱的轴线是由左旋和右旋相互交替的曲线; 管柱和井眼的接触力在左右旋交界点最大; 管柱每段螺旋长度越长, 轴向载荷下变形越大。

关键词 油气井 管柱 屈曲 非线性方程

引 言

在高温高压井地层测试中, 测试管柱因各种效应引起的变形足以影响到施工安全性。因此, 高温高压井的测试设计都要进行测试管柱在各种工况下的强度校核, 其中管柱屈曲变形计算是非常重要的一个方面。自从 Lubinski 于 1962 年导出了无摩擦、无重杆在井眼中螺旋屈曲所满足的微分方程以来^[1], 人们一直沿用着 Lubinski 得到的解来解决井眼中管柱的屈曲变形计算问题。2002 年 Mitchell 得到了另外的几个解^[2], 这些解的得出为井眼中管柱的屈曲分析计算提供了新的思路。

本文从基本的力学方程出发, 考虑了井眼中管柱与井眼内壁的摩擦力, 得出了更为普遍的微分方程, 通过简化, 得到较为简单的微分方程^[2]。通过分析 Mitchell 的精确解, 得出一些有益的结论, 可以为高温高压井地层测试工程设计提供指导性的理论。

管柱屈曲变形微分方程及解

假设井眼的轴线方向为 x 轴, 在文献[3]的基础上, 考虑摩擦力, 得出如下方程:

$$\frac{dF_x}{dx} = \mu N - q \quad (1)$$

$$\frac{dF_y}{dx} = -N \sin \theta \quad (2)$$

$$\frac{dF_z}{dx} = N \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = r(F_y \sin \theta - F_z \cos \theta) \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = F_z + F_x r \frac{d \cos \theta}{dx} \quad (5)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = F_x r \frac{d \sin \theta}{dx} - F_y \quad (6)$$

式中: F_x ——管柱轴向力;

F_y 、 F_z ——管柱与井壁的接触力 y 方向和 z 方向的分力;

N ——管柱与井壁的接触力;

μ ——摩擦系数;

q ——管柱的重力;

θ ——管柱截面圆心与井眼截面圆心的连线与井眼坐标 x 轴夹角;

r ——井眼内半径与管柱外半径之差。

井眼的约束使屈曲变形仍在弹性小变形范围内, 梁假设仍起作用, 因此有

$$M_y = EJ \frac{d^2 z}{dx^2} = -EJr \frac{d^2 \cos \theta}{dx^2} \quad (7)$$

$$M_z = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -EJr \frac{d^2 \sin \theta}{dx^2} \quad (8)$$

式中: E ——管柱材料的杨氏模量;

J ——管柱的截面惯性矩。

由(2)式和(3)式得

$$N = -\frac{dF_y}{dx} \sin \theta + \frac{dF_z}{dx} \cos \theta \quad (9)$$

〔作者简介〕 魏大农, 高级工程师, 1961 年出生, 1982 年毕业于江汉石油学院矿场地球物理专业, 1997 年硕士研究生毕业, 现从事综合井筒技术研究开发和管理工作的。

将(7)式、(8)式代入(5)式、(6)式,再代入(9)式。上述方程可以导出如下的常微分方程,即

$$F_x \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \frac{dF_x}{dx} \frac{d\theta}{dx} + EJ \left[\left(\frac{d^4 \theta}{dx^4} \right) - 6 \frac{d^2 \theta}{dx^2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad (10)$$

和反力为

$$N = r \left\{ F_x \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + EJ \left[4 \frac{d\theta}{dx} \frac{d^3 \theta}{dx^3} + 3 \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^4 \right] \right\} \quad (11)$$

将(9)式与文献[5]比较,(9)式左边多出了第二项,如果轴向力为常量,则(9)式与文献[5]的一致。

设 $\zeta = \sqrt{F_x/(EJ)} x$,忽略(9)式左边第二项,并且令 $u = \frac{d\theta}{d\zeta}$,则(10)式化为

$$- \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + u(2u^2 - 1) + C = 0 \quad (12)$$

式中: C ——积分常数。

方程(11)简化为

$$N = u^2 + 4u \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + 3 \left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 - u^4 \quad (13)$$

用雅可比椭圆函数,得

$$u(\zeta) = \alpha \beta \operatorname{sn}(\beta \zeta + \phi(m)) \quad (14)$$

其中 $\alpha = k, \beta = 1/\sqrt{1+k^2}$

代入 $\zeta = \sqrt{F_x/(EJ)} x$,得出^[2]

$$u = \sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}} \operatorname{sn} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) \quad (15)$$

式中: k ——待定的常数。

对(15)式积分,得

$$\theta = k \ln [\operatorname{dn}(\beta \zeta, k) - k \operatorname{cn}(\beta \zeta, k)] \quad (16)$$

式中: $\operatorname{sn}, \operatorname{dn}, \operatorname{cn}$ ——雅可比椭圆正弦、雅可比椭圆正切和雅可比椭圆余弦函数(参见文献[4])。

解的分析和应用

为了分析解的性状并应用到油井的试井工程中,根据(15)式和(16)式,假设 $k = 0.99999$, $r = 0.7$,管柱外半径 $r_1 = 0.7$,可以绘出井眼中管柱变形的形状(见图1)。该解与 Lubinski 的完全螺旋屈曲解不同:Lubinski 解在整个屈曲管柱长度都是螺

旋形状;而(16)式在井中左旋和右旋交替,在图1中指出了由左旋改变成右旋的交界点。左右旋的长度与常数 k 的大小有关, k 越大,螺旋圈数越多,如果 $k \rightarrow 1$,则解趋于 Lubinski 解。

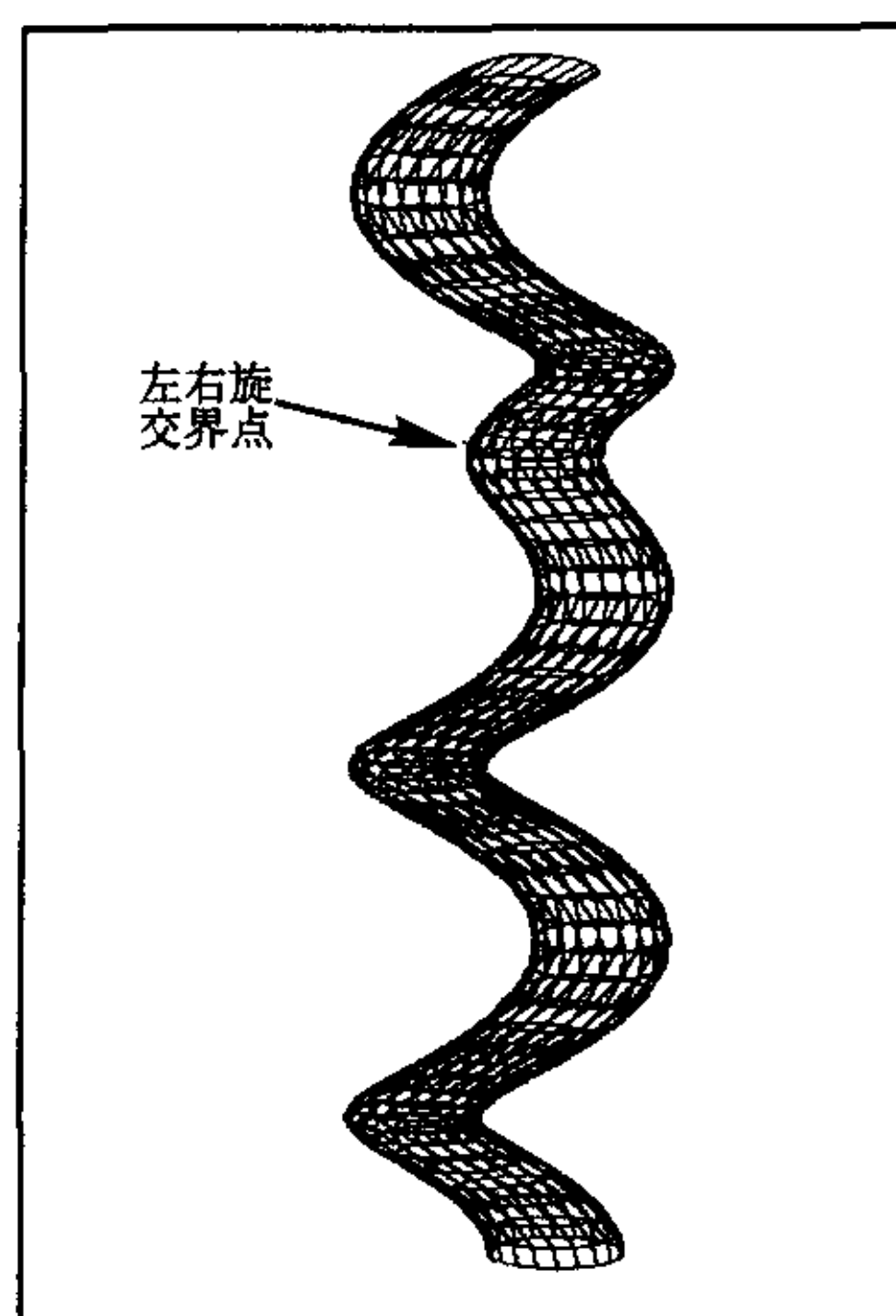


图1 井眼中管柱的屈曲形状

将(14)式代入(13)式,得出井眼内壁与管柱间的接触力 N ,即

$$N = \left\{ k^2 \left[3 + 10k^2 \operatorname{sn}^4 \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) - 6(1+k^2) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+k^2}}, k \right) \right] \right\} / (1+k^2)^2 \quad (17)$$

(17)式的图形如图2所示。管柱与井眼内壁的接触力 N 在螺旋屈曲部分基本上为常数,其值的大小为0.25。在旋向发生变化的部位接触力变化较大,最大值为0.75;在部分区域,接触力为负值。该区域的解并不正确,但由于区域并不大,而且最小值仅为-0.15,影响不大。

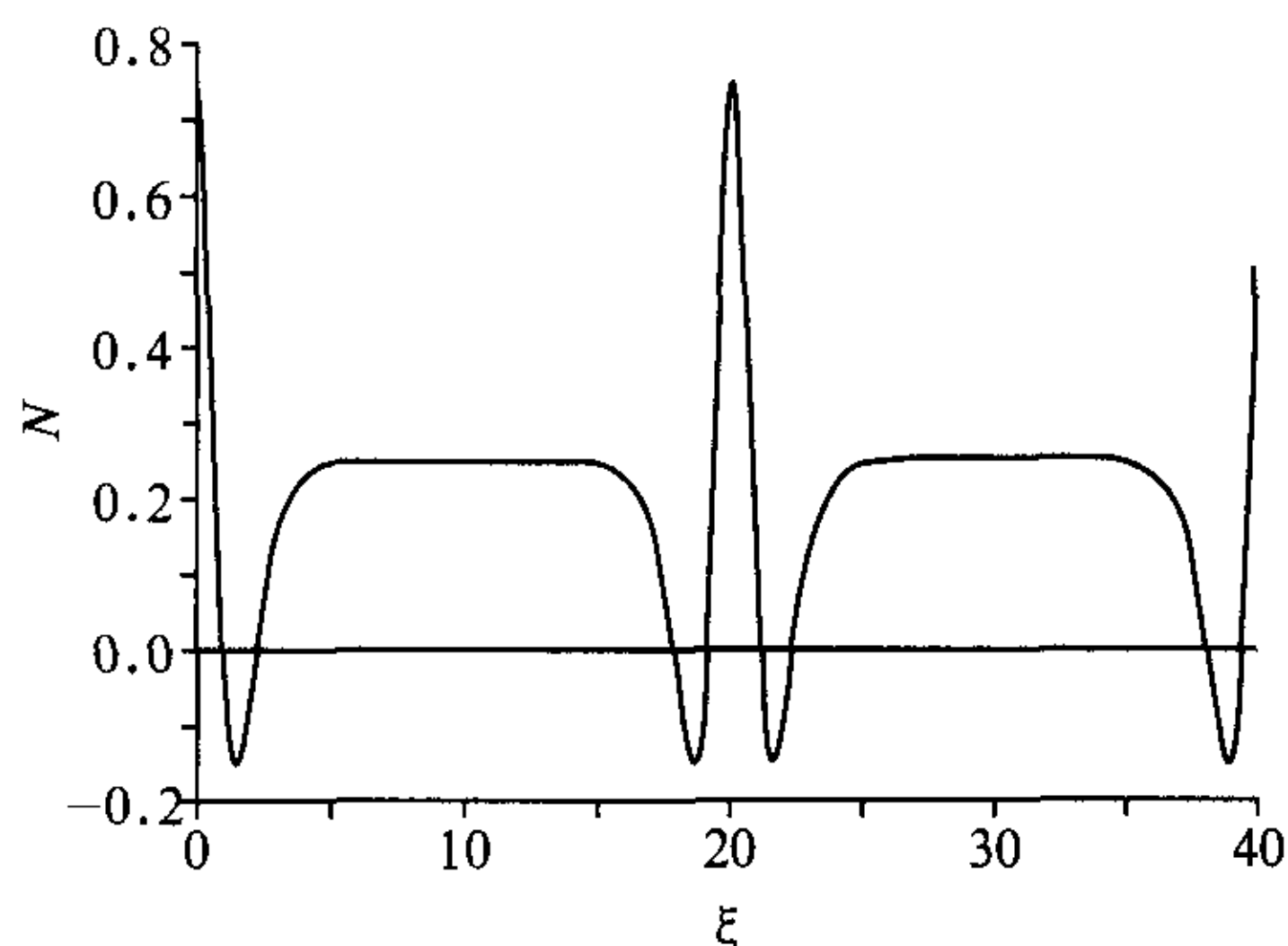


图2 管柱与井眼内壁的接触力变化曲线

管柱由于屈曲变形会发生缩短,无因次缩短的长度 ΔL_z 由下式计算,即

$$\Delta L_{\zeta} = \frac{\Delta L}{r^2} \sqrt{\frac{EJ}{F}} = \frac{1}{2} \int_0^l u^2 d\zeta \quad (18)$$

ΔL_{ζ} 与 k 值有关,图 3 给出了不同 k 值的缩短值 ΔL_{ζ} 与 ζ 的关系。

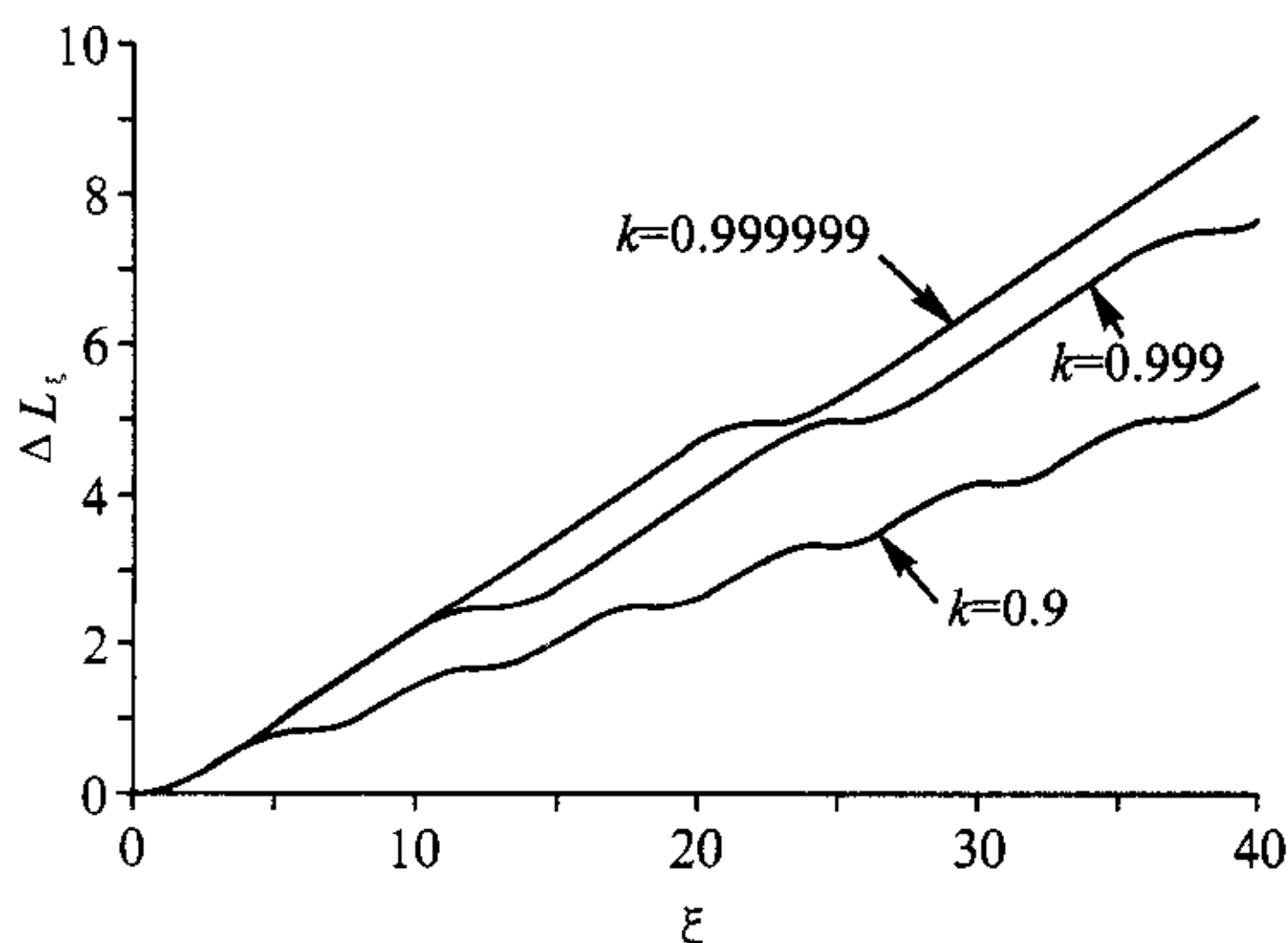


图3 不同 k 值时管柱屈曲引起缩短情况曲线

随 k 值的增加,屈曲缩短值增加,Lubinski 的缩短值最大,在计算变形时必须考虑这种影响。

结 论

1. 精确解是由左旋和右旋交替的螺旋屈曲组成。

2. 管柱与井壁的接触力在交替区域变化较大,其最大值为平均值的 3 倍。

3. 每段螺旋越长,管杆越柔软,在一定轴向载荷下屈曲变形越大。

参 考 文 献

- 1 Lubinski, A et al. Helical Buckling of Tubing Sealed in Packers. JPT, 1962, 14(6): 655 ~ 670
- 2 Mitchell, R F. Exact Analytic Solutions for Pipe Buckling in Vertical and Horizontal Wells. SPE Journal, Dec. 2002: 36 ~ 51
- 3 高国华,李琪,张健仁.管柱在垂直井眼中的屈曲分析.西安石油学院学报,1996,11(1):33 ~ 35
- 4 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:北京大学出版社,2000

本文收稿日期:2004-11-29 编辑:穆立婷

《油气井测试》征稿启事

《油气井测试》是国内测试、试井行业惟一公开发行的专业技术刊物,是河北省优秀科技期刊,中文核心期刊,中国科技论文统计源期刊,中国期刊光盘版期刊。辟有行业综述、试井理论研究、油藏评价、软件介绍、现场工艺(中途地层测试、完井测试、开发试井、油藏动态监测)、仪器装备等栏目。欢迎踊跃投稿。

1. 稿件要求

(1)题目 简洁明了,紧扣文章主题,字数不超过 20 个。

(2)作者 应不超过 4 人,写明各作者单位、通信地址和邮编;第一作者应写明作者简介,即姓名、性别、出生年月、最终学历及毕业时间、院校和专业,现从事的工作,现职称或职务,详细通讯地址及联系电话等。

(3)摘要 文字精练,结构严谨,反映文章的主要信息,即研究的目的,应用的理论及技术方法,取得的主要成果及结论等,300 字左右,并提供英文摘要。

(4)关键词 用 3~8 个关键词反映文章的主要内容。

(5)正文 内容紧扣本刊报导范围,论文格式规范,论点、论据阐述清晰。一般要求不超过 6000 字(含图、表);文中使用法定计量单位,并对文中首次出现的参数、变量物理意义加以说明;字母、符号要分清大、小写,上、下标要注明;图、表简洁,切忌重复,文、图、表紧密结合。写明图、表序号及表题、图注;要求图件规则、清晰。

(6)参考文献 按在正文中出现的先后顺序编码并在正文中标注(非公开发表的文章、研究报告、资料以页脚注形式标注)。参考文献著录项目必须齐全,包括:作者,篇名,出处,出版情况,即出版者、出版地、出版年、期次、卷名、起止页码等。

2. 说明

(1)请提供稿件软盘或以电子邮件方式投稿,并附文字稿。

(2)本刊优先刊登国家自然科学基金项目和省部级以上科技攻关项目的研究成果。

(3)作者自留底稿,本刊概不退稿;收到稿件后,本刊即向作者发出收稿通知;半年内未收到修改意见或录用通知,请自行处理或与编辑部联系查询。

(4)稿件一经刊出,本刊即付稿酬,并赠当期刊物 2 本。

(5)文章发表后的获奖、应用及推广情况,请及时与本编辑部联系,反馈有关情况,本刊将选登其中有关信息。